Απειροστικός Λογισμός Ι — **Μάθημα 4** — 14/10/2015

Πρόταση: Αν $x_1,\dots,x_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$\underbrace{\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}}_{\text{αρμονικός μέσος}} \le \underbrace{\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}}_{\text{γεωμετρικός μέσος}} \le \underbrace{\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}}_{\text{αριθμητικός μέσος}}$$

Η ανισότητα αυτή λέγεται ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού-αρμονικού μέσου και η ισότητα ισχύει αν-ν οι αριθμοί $x_1,\dots,x_n$ είναι ίσοι, δηλαδή $x_1=\dots=x_n$.

Απόδειξη: Θέτουμε $A=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$

Ορίζουμε $b_1=\frac{x_1}{A},\ b_2=\frac{x_2}{A},\ \dots,\ b_n=\frac{x_n}{A}$

Τότε, $b_i>0$ $i=1,\dots,n$ $\quad b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n=\frac{x_1}{A}\cdot\frac{x_2}{A}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{A}=\frac{x_1 x_2\cdots x_n}{A^n}=1$.

Άρα, από το προηγούμενο λήμμα βγάζουμε ως συμπέρασμα πως το άθροισμα

$$b_1+b_2+\dots+b_n\ge n \Rightarrow \frac{x_1}{A}+\frac{x_2}{A}+\dots+\frac{x_n}{A}\ge n \Rightarrow \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{A}\ge n \Rightarrow \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\ge A$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}$$

Επίσης, πάλι από το προηγούμενο λήμμα, η ισότητα θα ισχύει αν-ν $\frac{x_1}{A}=\frac{x_2}{A}=\dots=\frac{x_n}{A}=1 \Leftrightarrow x_1=x_2=\dots=x_n$.

Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου για τους αριθμούς $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\dots,\frac{1}{x_n}$ προκύπτει ότι:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} \le \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n} \Rightarrow \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}\le\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$$

Εφαρμογή: α) Από τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό, μικρότερη περίμετρο έχει το τετράγωνο.

β) (αναδιατύπωση του α)) Από τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο, μεγαλύτερο εμβαδό έχει το τετράγωνο.

γ) Για $n=3$: Από τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με σταθερό όγκο, μικρότερο άθροισμα ακμών έχει ο κύβος.

δ) (αναδιατύπωση του γ)) Από τα ορθογώνια [illegible] ακμών, μεγαλύτερο όγκο έχει ο κύβος.

Ασκήσεις: (Να τις παραδώσετε στο επόμενο μάθημα)

1) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ να δειχθεί με επαγωγή.

2) Θεωρούμε το σύνολο $A=\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$. Ν.δ.ο. $\inf A=0$ με πλήρη αιτιολόγηση.

3) Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$ τυχαίος. Ορίζουμε $A=\{x\in\mathbb{Q} \mid x<\lambda\}$. Ν.δ.ο. $\sup A=\lambda$

4) Έστω A,B δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε $x<y$ $\forall x\in A$ και $\forall y\in B$

(i) Ν.δ.ο. $\sup A\leq \inf B$

(ii) Ν.δ. χρησιμοποιώντας κατάλληλα αντιπαραδείγματα ότι με τις παραπάνω υποθέσεις δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $\sup A<\inf B$

5) Να υπολογισθεί το $(x+2)^7$ χρησιμοποιώντας το διώνυμο του Νεύτωνα.

Παρατήρηση: Το άθροισμα δύο ρητών είναι πάντα ρητός.

$$\left[\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta} \quad \alpha\delta\in\mathbb{Z},\ \beta\gamma\in\mathbb{Z} \Rightarrow \alpha\delta+\beta\gamma\in\mathbb{Z} \text{ και } \beta\delta\in\mathbb{Z} \text{ Άρα } \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}\in\mathbb{Q}\right]$$

Θεώρημα: (Πυκνότητα των άρρητων στους πραγματικούς)

Αν $a,b\in\mathbb{R}$, για $a<b$, τότε υπάρχει r άρρητος ώστε $a<r<b$.

Απόδειξη: $a<b \Rightarrow a+\sqrt{2}<b+\sqrt{2}$ Από πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$

$\exists q\in\mathbb{Q}$ με $a+\sqrt{2}<q<b+\sqrt{2} \Rightarrow a<q-\sqrt{2}<b$ Αρκεί ν.δ.ο. $q-\sqrt{2}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

Αν $q-\sqrt{2}$ ήταν ρητός (έστω $q-\sqrt{2}=p\in\mathbb{Q}$) τότε $\sqrt{2}=q-p$ ρητός. Άτοπο!

Άρα ο $q-\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

$a>0$

a^n για $n\in\mathbb{N}$ $a^1=a$, $a^{n+1}=a^n\cdot a$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Ορισμός της δύναμης a^x για $a>0$ $x\in\mathbb{R}$ $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$

→ Για εκθέτη στο $\mathbb{N}$ το είδατε ήδη.

→ $a^0=1$

→ $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ για $n\in\mathbb{N}$

→ $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

→ Για $q\in\mathbb{Q}$, $q=\frac{m}{n}$, $m\in\mathbb{Z}$ και $n\in\mathbb{N}$, $a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m$

$1^x=1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Αν $a>1$, ορίζουμε $a^x=\sup\{a^q : q\in\mathbb{Q} : q<x\}$.

Αν $0<a<1$ ορίζουμε $a^x=\inf\{a^q : q\in\mathbb{Q} : q<x\}$.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ:

Αν X και Y είναι δύο σύνολα, συνάρτηση από το X στο Y ονομάζεται μια αντιστοίχηση κάθε στοιχείου του X σε ένα μοναδικό στοιχείο του Y.

(x,y) το διατεταγμένο ζεύγος,

με πρώτο στοιχείο το x και δεύτερο το y.

$$(a,b)=(\gamma,\delta) \Leftrightarrow \begin{cases} a=\gamma \\ b=\delta \end{cases}$$

Αν X και Y δύο σύνολα $X\times Y=\{(x,y) \mid x\in X \text{ και } y\in Y\}$.

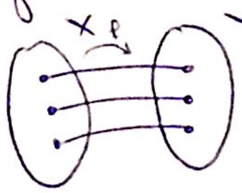
Συνάρτηση από το X στο Y ονομάζεται κάθε υποσύνολο f του $X\times Y$ ώστε:

(i) $\forall x\in X \ \exists y\in Y$ ώστε $(x,y)\in f$

(ii) Αν $(x,y_1)\in f$ και $(x,y_2)\in f$ τότε $y_1=y_2$

Για $x\in X$ το <u>μοναδικό</u> $y\in Y$ για το οποίο $(x,y)\in f$ συμβολίζεται $f(x)$,

δηλαδή $(x,y)\in f \Leftrightarrow y=f(x)$



Αν $f:X\to Y$ συνάρτηση, το σύνολο τιμών του f συμβολίζεται $R(f)$ ή $f(X)$.

$$f(X)=\{y\in Y \ \exists x\in X \ y=f(x)\}=\{f(x) \mid x\in X\}.$$

Παραδείγματα:

Για $c\in\mathbb{R}$, η σταθερή συνάρτηση με τιμή c.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=c \ \forall x\in\mathbb{R}$

$f(X)=\{c\}$